

Control de un brazo robot de eslabón flexible mediante PID Generalizado y Control Sin Modelo.

F-J. Sorcia-Vázquez¹, C-D. García-Beltrán¹, J. Reyes-Reyes², A. Rodríguez-Palacios¹.

¹Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos.

²Instituto Tecnológico de Zacatepec, Zacatepec, Morelos.

felipedjsv@hotmail.com

Resumen—Se presenta: a) el modelado de un brazo robot de eslabón flexible de un grado de libertad; b) el análisis, diseño, simulación e implementación en tiempo real de dos esquemas de control: 1) el control PID Generalizado basado en el modelo lineal del sistema; 2) Control Sin Modelo para seguimiento de trayectoria. Se realizó un análisis comparativo de estas metodologías de diseño, así como del desempeño de ambos esquemas. Tanto en simulación como la aplicación en tiempo real se obtuvieron resultados satisfactorios en el desempeño de los controladores propuestos.

Palabras clave: Brazo robot de eslabón flexible, control PID generalizado (GPID), Control Sin Modelo.

I. INTRODUCCIÓN

Entre de los dispositivos electromecánicos se encuentran los robots accionados mediante motores eléctricos, que son de uso muy frecuente en la industria manufacturera. El principal objetivo de control para estos sistemas, es llevar al efector final del robot a una posición deseada para que éste cumpla con la tarea asignada. En la actualidad, se busca que las estructuras de los robots sean más ligeras. Esto, se obtiene modificando su geometría o utilizando materiales más livianos, lo que origina un fenómeno de oscilación del efector del brazo al acercarse a la posición final. Dichas oscilaciones se presentan por la flexibilidad de las articulaciones ó la flexibilidad en el eslabón (Feliu, 2006).

Para resolver el problema de control de brazos flexibles, se abordaron distintas técnicas de control. Entre éstas se encuentran: Control Robusto (Etxebarria *et ál.* 2005), Control H_∞ (Yeon *et ál.* 2008) y (Hiessien y Lohmann, 2001), Control Adaptable (Yang *et ál.* 1997), (de Queiroz *et ál.* 1999) y (Yim, 2001), Control por Redes Neuronales (Gutiérrez *et ál.* 1998), Control Óptimo (Carusone *et ál.* 1993) y Control por Platitud Diferencial (Sira y Agrawal 2004).

En este artículo se propone la aplicación del control GPID robusto para perturbaciones constantes para el seguimiento de trayectoria del eslabón flexible. Esta técnica de control, que se usa en (Chávez *et ál.* 2005) y (Sira *et ál.* 2001), integra la estimación de estados no medibles con un controlador retroalimentado. Se basa en la estimación estructural de las variables sin tener que utilizar estimadores asintóticos. Tales variables se estiman usando las entradas y salidas del sistema y las integrales iteradas de

éstas mismas. Estos “reconstructores integrales” presentan un “off-set” o desviación del valor verdadero del estado. Una de las ventajas de este controlador (GPID) es que se implementa únicamente con la medición de la variable de salida del sistema.

También se propone el uso de una técnica de control sin modelo a la cual los autores le dieron el nombre de control PID inteligente (Flies y Join, 2008) y (Flies y Join, 2009), y a la cual nos referiremos en lo subsecuente como Control Sin Modelo (CSM). Este control toma en cuenta partes desconocidas de la planta que se desean controlar sin tener que modelarlas. Estas partes desconocidas pueden ser no linealidades ó parámetros variantes en el tiempo.

El objetivo final de este trabajo es comparar dos esquemas que se derivan del control PID clásico: el control GPID, que se basa en el conocimiento parcial ó total de modelo del sistema, mientras que el esquema de CSM, no requiere del modelo del sistema. Ambos esquemas se aplican para seguimiento de trayectoria en un prototipo didáctico de la marca Quanser, que consiste en un brazo de eslabón flexible de un grado de libertad.

Este artículo se encuentra estructurado de la forma siguiente: en la Sección II se expone el modelado del brazo de eslabón flexible. En la Sección III se muestra el análisis de los esquemas de GPID y CSM. En la Sección IV se realiza el diseño, simulación e implementación de los controladores propuestos. Finalmente, en la Sección V se presentan las conclusiones del trabajo.

II. MODELADO DEL SISTEMA.

El sistema de brazo flexible consiste en un motor de CD de alto par, acoplado a un eslabón de material flexible mediante dos sistemas de engranajes, uno incorporado en la carcasa del motor y otro montado en la estructura. La Figura 1 muestra el sistema de eslabón flexible

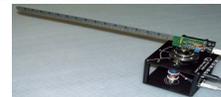


Figura 1. Brazo de eslabón flexible.

Para obtener el modelo del sistema, se parte del modelo matemático del motor de CD. En la Figura 2 se muestra el circuito de armadura del motor:

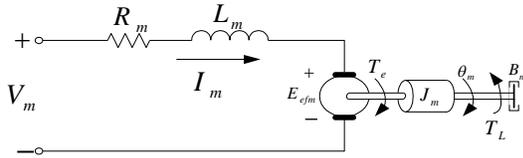


Figura 2. Circuito de armadura y subsistema mecánico de un motor de CD de imanes permanentes.

De la Figura 2 se obtienen las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento del motor. El subsistema eléctrico del motor se representa por

$$V_m - R_m I_m - L_m \frac{dI_m}{dt} - E_{emf} = 0 \quad (1)$$

donde V_m e I_m son el voltaje y la corriente de armadura, respectivamente; R_m y L_m son la resistencia e inductancia de armadura, respectivamente; E_{emf} es la fuerza contra electromotriz generada por el motor.

Considerando que la resistencia del devanado es mucho mayor que la inductancia de éste, es decir, $R_m \gg L_m$, el término $L_m dI_m/dt$ en (1) se puede despreciar. Dado que $E_{emf} = K_m \dot{\theta}_m$, con $\dot{\theta}_m$ la velocidad angular del eje del motor y K_m una constante propia del motor, se puede obtener la ecuación de la corriente de armadura como

$$I_m = \frac{V_m - K_m \dot{\theta}_m}{R_m} \quad (2)$$

El motor se encuentra acoplado al brazo mediante un sistema de reducción de engranes, con factor de reducción K_g y eficiencia η_g . Así, el par aplicado a la carga es

$$T_L = \eta_g K_g T_e \quad (3)$$

donde T_e es el par generado por el motor que está dado por

$$T_e = \eta_m K_T I_m \quad (4)$$

donde K_T es la constante de par y η_m la eficiencia del motor. Sustituyendo (2) en (4), y el resultado en (3), y dado que $\dot{\theta}_m = K_g \dot{\theta}_{load}$, con θ_{load} la posición de la carga, se tiene que el par aplicado a la carga es

$$T_L = \eta_g \eta_m K_g K_T \left(\frac{V_m - K_m K_g \dot{\theta}_{load}}{R_m} \right) \quad (5)$$

Para el modelado del sistema mecánico, se parte de

$$J_{hub} \ddot{\theta}_{load} = T_L - B_{eq} \dot{\theta}_{load} \quad (6)$$

donde J_{hub} es la inercia del sistema de engranaje y B_{eq} es el coeficiente de fricción viscosa total del sistema. Después de sustituir (5) en (6) y de realizar el álgebra correspondiente, se obtiene la ecuación diferencial del motor de CD de imanes permanentes:

$$J_{eq} R_m \ddot{\theta}_{load} + (B_{eq} R_m + \eta_g \eta_m K_m K_T K_g^2) \dot{\theta}_{load} = \eta_g \eta_m K_g K_T V_m \quad (7)$$

dónde $J_{eq} = J_{hub} + \eta_g K_g^2 J_m$.

Ahora, se procede a modelar el eslabón flexible que se obtiene mediante la formulación de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = u - \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \quad (8)$$

donde $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ es el Lagrangiano, que se define como la diferencia de la energía cinética T y potencial V . $\mathcal{F}(\dot{q})$ es la función de disipación de Rayleigh, u es la entrada de control, q y \dot{q} son las coordenadas generalizadas de posición y velocidad. Para el eslabón flexible se definen como variables generalizadas a α y θ_{load} que son la deflexión del brazo y la posición angular del eje del motor, respectivamente.

Esta deflexión origina un desplazamiento D del punto final del eslabón con respecto a su posición inicial. La deflexión se supone pequeña. Se define el ángulo de deflexión del eslabón de longitud L como

$$\alpha = D/L \quad (9)$$

D se mide en longitud de arco y α en radianes.

La Figura 3 presenta la deflexión del eslabón flexible con m_1 la masa en la punta del eslabón.

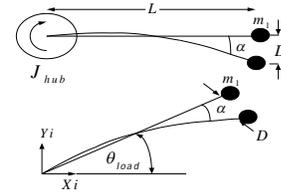


Figura 3. Diagrama esquemático del brazo flexible.

En la Figura 4 se representa al eslabón flexible como un resorte rotatorio. Los vectores X_i y Y_i se toman como ejes de referencia, y el origen de coordenadas es la intersección de éstos y el eje del sistema de engranaje.

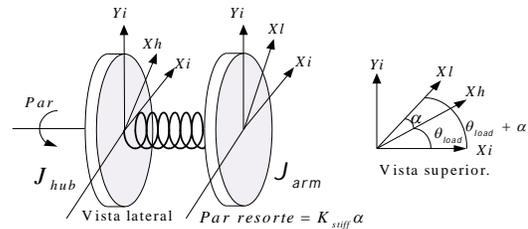


Figura 4. Modelo simplificado del brazo flexible.

El desplazamiento del sistema de engranaje se representa con el vector X_h y la deflexión del eslabón con el vector X_l . Este sistema rotatorio se describe por

$$J_{arm} \ddot{\alpha} = -K_{stiff} \alpha \quad (10)$$

donde K_{stiff} y J_{arm} representan la rigidez y la inercia del eslabón, respectivamente.

Suponiendo una condición inicial dada y conociendo la frecuencia natural de amortiguamiento del eslabón ω_c , se puede representar cualquier oscilación del eslabón mediante

$$\ddot{\alpha} = -\omega_c^2 \alpha \quad (11)$$

La constante de rigidez del eslabón se obtiene de sustituir (11) en (10)

$$K_{stiff} = \omega_c^2 J_{arm} \quad (12)$$

La energía potencial del sistema proviene únicamente del resorte

$$V = V_{resorte} = \frac{1}{2} K_{stiff} \alpha^2 \quad (13)$$

La energía cinética del sistema se debe al movimiento del eje del motor y del eslabón

$$T = T_{eje} + T_{brazo} = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}_{load}^2 + \frac{1}{2} J_{load} (\dot{\theta}_{load} + \dot{\alpha})^2 \quad (14)$$

donde $J_{load} = J_{arm} + m_1 L^2$ representa la inercia total debida a las inercias del eslabón y de la masa de la punta.

Así, para este sistema el Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L}(\alpha, \dot{\theta}_{load}, \dot{\alpha}) = T - V = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}_{load}^2 + \frac{1}{2} J_{load} (\dot{\theta}_{load} + \dot{\alpha})^2 - \frac{1}{2} K_{stiff} \alpha^2 \quad (15)$$

La función de disipación de Rayleigh se obtiene a partir del coeficiente de fricción viscosa total del sistema, esto es:

$$\mathcal{F}(\dot{\theta}_{load}) = \frac{1}{2} B_{eq} \dot{\theta}_{load}^2 \quad (16)$$

Sustituyendo (15) y (16) en (8) y realizando las operaciones se obtiene:

$$(J_{eq} + J_{load}) \ddot{\theta}_{load} + J_{load} \ddot{\alpha} = T_L - B_{eq} \dot{\theta}_{load} \quad (17)$$

$$J_{load} \ddot{\theta}_{load} + J_{load} \ddot{\alpha} + K_{stiff} \alpha = 0 \quad (18)$$

Despejando $\ddot{\theta}$ y $\ddot{\alpha}$ de (17) y (18), respectivamente, y usando (5), que describe el par de entrada, se obtiene

$$\ddot{\theta}_{load} = \frac{K_{stiff}}{J_{eq}} \alpha - \frac{\eta_g \eta_m K_m K_T K_g^2 + B_{eq} R_m}{R_m J_{eq}} \dot{\theta}_{load} + \frac{\eta_g \eta_m K_g K_T}{R_m J_{eq}} V_m \quad (19)$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{K_{stiff} (J_{eq} + J_{load})}{J_{eq} J_{load}} \alpha + \frac{\eta_g \eta_m K_m K_T K_g^2 + B_{eq} R_m}{R_m} \dot{\theta}_{load} - \frac{\eta_g \eta_m K_g K_T}{R_m J_{eq}} V_m \quad (20)$$

A partir de las ecuaciones (19) y (20) se puede obtener una representación en espacio de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{load} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta}_{load} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_{stiff}}{J_{eq}} & -\frac{\eta_g \eta_m K_m K_T K_g^2 + B_{eq} R_m}{R_m J_{eq}} & \frac{\eta_g \eta_m K_g K_T}{R_m J_{eq}} \\ 0 & -\frac{K_{stiff} (J_{eq} + J_{load})}{J_{eq} J_{load}} & \frac{\eta_g \eta_m K_m K_T K_g^2 + B_{eq} R_m}{R_m J_{eq}} & -\frac{\eta_g \eta_m K_g K_T}{R_m J_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{load} \\ \alpha \\ \dot{\theta}_{load} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\eta_g \eta_m K_g K_T}{R_m J_{eq}} \\ -\frac{\eta_g \eta_m K_g K_T}{R_m J_{eq}} \end{bmatrix} V_m, \quad y = [1 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \theta_{load} \\ \alpha \\ \dot{\theta}_{load} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (21)$$

III. CONTROL GPID Y CSM.

En esta sección se analiza el diseño de un controlador tipo GPID robusto para perturbaciones constantes, desde el enfoque de plititud diferencial y el esquema de Control Sin Modelo.

A. Control GPID robusto para perturbaciones constantes.

Considere el siguiente sistema de n -ésimo orden perturbado, el cual está en función de la n -ésima derivada temporal de la salida plana y

$$y^{(n)} = u + \xi \quad (22)$$

donde ξ es una perturbación constante.

Para este sistema se puede definir un controlador nominal u^* basado en la trayectoria de salida deseada y sus n derivadas sucesivas, sin tomar en cuenta la perturbación

$$u^* = y^{(n)*} \quad (23)$$

Se define la siguiente ecuación de error

$$e_y^n = e_u + \xi \quad (24)$$

donde $e_y = y - y^*$ y $e_u = u - u^*$

De (24) se puede obtener un conjunto de reconstructores integrales de la dinámica del error de la salida basadas en el error de entrada mediante integrales iteradas[†]

$$\begin{aligned} e_y^{n-1} &= \int e_u d\mu_1 + \int \xi d\mu_1 \\ e_y^{n-2} &= \int_0^{t_1} \int_0^{\mu_1} e_u d\mu_2 d\mu_1 + \int_0^{t_1} \int_0^{\mu_1} \xi d\mu_2 d\mu_1 \\ &\vdots \\ e_y &= \int_0^t \int_0^{\mu_1} \dots \int_0^{\mu_{n-1}} e_u d\mu_n \dots d\mu_2 d\mu_1 + \int_0^t \int_0^{\mu_1} \dots \int_0^{\mu_{n-1}} \xi d\mu_n \dots d\mu_2 d\mu_1 \end{aligned}$$

Con los reconstructores integrales del estado se propone la siguiente ley de control u , basada en la retroalimentación del estado, con una compensación integral de los errores de reconstrucción; y que considera la presencia de una perturbación constante y la señal de control nominal u^* :

$$u = u^* - (k_{2n-1} e_y^{n-1} + \dots + k_{n+1} \dot{e}_y + k_n e_y) - (k_{n-1} \int e_y + \dots + k_0 \int^{(n)} e_y) \quad (25)$$

[†] $\int_0^{(\eta)} \phi(t)$ denota a la integral iterada $\int_0^t \int_0^{\mu_1} \dots \int_0^{\mu_{\eta-1}} \phi(\mu_\eta) d\mu_\eta \dots d\mu_2 d\mu_1$ (Chávez et al. 2005)

Sustituyendo la ecuación de error de entrada y derivando n veces (25) se obtiene la ecuación dinámica del error de salida en lazo cerrado:

$$e_y^{2n} + k_{2n-1}e_y^{2n-1} + \dots + k_{n+1}e_y^{n+1} + k_n e_y^n + k_{n-1}e_y^{n-1} + \dots + k_0 e_y = 0 \quad (26)$$

Aplicando la transformada de la Laplace a (26), obtenemos el polinomio de lazo cerrado del sistema:

$$\left(s^{2n} + k_{2n-1}s^{2n-1} + \dots + k_{n+1}s^{n+1} + k_n s^n + k_{n-1}s^{n-1} + \dots + k_0 \right) E(s) = 0 \quad (27)$$

el cual se requiere que sea Hurwitz.

De la (25) se puede llegar a la siguiente estructura, llamada controlador GPID robusto para perturbaciones constantes:

$$u = u^* - \left(\frac{k_n s^n + k_{n-1} s^{n-1} + k_{n-2} s^{n-2} + \dots + k_0}{s(s^{n-1} + k_{2n-1} s^{n-2} + k_{2n-2} s^{n-2} + \dots + k_{n+1})} \right) (y - y^*) \quad (28)$$

B. CONTROL SIN MODELO.

En (Flies y Join, 2008) y (Flies y Join, 2009), se describe el esquema de Control Sin Modelo como un esquema que toma en cuenta partes de la planta que se desean controlar sin tener que modelarlas. Tales partes desconocidas pueden corresponder a la dinámica no lineal ó a parámetros variantes en el tiempo. Consideremos al sistema SISO no lineal descrito localmente por:

$$y^n = F + \delta u \quad (29)$$

donde δ es una constante dada. La función $F = y^n - \delta u$ se obtiene mediante la estimación de la n -ésima derivada de la salida del sistema. En dicha función está concentrada toda la información del sistema que se desea controlar. Para poder obtener el comportamiento deseado del sistema, se propone la siguiente estructura de CSM (Flies y Join, 2008) y (Flies y Join, 2009), la cual involucra un control PID clásico:

$$u = -\frac{F}{\delta} + \frac{y^{*n}}{\delta} + K_p e + K_i \int e + K_d \dot{e} \quad (30)$$

donde y^* es la trayectoria de referencia, y^{*n} es la n -ésima derivada de la trayectoria de referencia, y $e = y - y^*$ es el error de seguimiento.

El diseño del controlador se basa, entonces, en la identificación de F y en la selección de δ , K_p , K_i y K_d .

➤ Configuración libre de modelo.

Considere el sistema SISO de dimensión finita

$$E(t, y, \dot{y}, \dots, y^l, u, \dot{u}, \dots, u^k) = 0 \quad (31)$$

Este sistema puede ser lineal o no lineal. E es una función suficientemente suave de sus argumentos. Se asume

que para un entero $n, 0 < n \leq l, \partial E / \partial y^n \neq 0$ (Flies y Join, 2008). Por lo tanto, se puede determinar la n -ésima derivada de la salida del sistema a partir de (31). Entonces se tiene que:

$$y^n = E(t, y, \dot{y}, \dots, y^{n-1}, y^{n+1}, \dots, y^l, u, \dot{u}, \dots, u^k) \quad (32)$$

Al aproximar $E = F + \delta u$, se obtiene la ecuación (29) definida por $y^n = F + \delta u$, donde

- ✓ $\delta \in \mathbb{R}$ es un parámetro constante no físico, el cual lo elige el diseñador de tal manera que F y δu sean de la misma magnitud.
- ✓ F se determina mediante el conocimiento de u y δ , y de la estimación de y^n

➤ Modelado local.

Se asume que el sistema es invertible por la izquierda, es decir, que se pueden calcular las variables de salida a través de ecuaciones diferenciales (Flies y Join, 2009). Si hay más variables de salida que variables de entrada, por ejemplo, $p > m$, se toman estas m variables de entrada, para conseguir un sistema cuadrado invertible. La ecuación (29) se extiende a partir de

$$y_1^{n_1} = F_1 + \delta_{1,1} u_1 + \dots + \delta_{1,m} u_m \quad (33)$$

$$y_p^{n_p} = F_m + \delta_{m,1} u_1 + \dots + \delta_{p,m} u_m$$

donde $n_j \geq 1, j = 1, \dots, p$

Para eliminar cualquier lazo algebraico, debido a que la estimación de F se realiza con la señal de control, se calcula un valor numérico de

$$F_j = y_j^{n_j} - \delta_{j,1} u_1 - \dots - \delta_{j,m} u_m \quad (34)$$

en cada instante de muestreo mediante (Flies y Join, 2009):

$$F_j(k) = [y_j^{n_j}(k)]_e - \sum_{i=1}^m \delta_{j,i} u_i(k-1) \quad (35)$$

donde $[y_j^{n_j}(k)]_e$ corresponde a la estimación de la derivada en el instante de tiempo k .

IV. DISEÑO Y SIMULACIÓN DE LOS ESQUEMAS GPID Y CSM PARA EL ESLABÓN FLEXIBLE.

En esta sección se muestran los resultados en simulación y tiempo real de la aplicación de los esquemas GPID y CSM al sistema de brazo flexible.

A. DISEÑO DEL CONTROLADOR GPID PARA EL BRAZO FLEXIBLE.

Considérese el modelo lineal del eslabón flexible descrito por (21). En (Sira y Agrawal, 2004) se demuestra que un sistema es diferencialmente plano si, y sólo si, es controlable, y se reporta el procedimiento para obtener la salida plana de un sistema lineal. La salida plana para el sistema de brazo flexible es la suma de los ángulos θ_{load}

y α , es decir, $y = \theta_{load} + \alpha$. Se tiene que las derivadas de la salida plana son:

$$\dot{y} = \dot{\theta}_{load} + \dot{\alpha}, \ddot{y} = \gamma_1 \dot{\alpha}, \dddot{y} = \gamma_1 \ddot{\alpha}, y^{(4)} = \gamma_1 \ddot{\alpha}$$

$$\text{donde } \gamma_1 = \frac{K_{stiff}}{J_{eq}} - \frac{K_{stiff}}{J_{eq} J_{load}}$$

Una vez que la salida plana y sus derivadas sucesivas se han obtenido, se puede determinar el controlador nominal del sistema basado en la salida plana y sus n derivadas sucesivas, que está definido por:

$$V_m^* = \sigma_1 \dot{y}^* - \sigma_2 \ddot{y}^* - \sigma_3 \dddot{y}^* - \sigma_4 y^{*(4)} \quad (36)$$

donde

$$\sigma_1 = \frac{\beta_2}{\beta_3}, \sigma_2 = \frac{\beta_2}{\gamma_1 \beta_3}, \sigma_3 = \frac{\beta_1}{\gamma_1 \beta_3}, \sigma_4 = \frac{1}{\gamma_1 \beta_3}$$

$$\beta_1 = \frac{K_{stiff} (J_{eq} + J_{load})}{J_{eq} J_{load}}, \beta_2 = \frac{\eta_g \eta_m K_m K_T K_g^2 + B_{eq} R_m}{R_m J_{eq}}$$

$$\beta_3 = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_T}{R_m J_{eq}}$$

De acuerdo con (25), el controlador tipo GPID para el eslabón flexible tiene la forma

$$V_m = V_m^* - k_7 \ddot{e}_y - k_6 \ddot{e}_y - k_5 \dot{e}_y - k_4 e_y - k_3 \int e_y - \dots - k_0 \int^4 e_y \quad (37)$$

Se define la ecuación de error de entrada como

$$e_{V_m} = V_m - V_m^* = \sigma_1 \dot{e}_y - \sigma_2 \ddot{e}_y - \sigma_3 \ddot{e}_y - \sigma_4 e_y^{(4)} \quad (38)$$

Al sustituir (38) en (37), así como los reconstructores integrales de las derivadas del error de salida, se obtiene la siguiente ecuación dinámica del error

$$e_y^{(8)} + \lambda_7 e_y^{(7)} + \lambda_6 e_y^{(6)} + \lambda_5 e_y^{(5)} + \lambda_4 e_y^{(4)} + \dots + \lambda_3 \ddot{e}_y + \lambda_2 \ddot{e}_y + \lambda_1 \dot{e}_y + \lambda_0 e_y = 0 \quad (39)$$

donde

$$\lambda_7 = \frac{\sigma_3 + k_7 \sigma_4}{\sigma_4}, \lambda_6 = \frac{\sigma_2 + k_7 \sigma_3 + k_6 \sigma_4}{\sigma_4},$$

$$\lambda_5 = \frac{-\sigma_1 + k_7 \sigma_2 + k_6 \sigma_3 + k_5 \sigma_4}{\sigma_4}, \lambda_4 = \frac{-k_7 \sigma_1 + k_6 \sigma_2 + k_5 \sigma_3 - k_4}{\sigma_4},$$

$$\lambda_3 = \frac{-k_6 \sigma_1 + k_5 \sigma_2 - k_3}{\sigma_4}, \lambda_2 = \frac{-k_5 \sigma_1 - k_2}{\sigma_4}, \lambda_1 = -\frac{k_1}{\sigma_4}, \lambda_0 = -\frac{k_0}{\sigma_4}$$

Al aplicar la transformada de Laplace a la ecuación (39) se obtiene el polinomio característico

$$s^8 + \lambda_7 s^7 + \lambda_6 s^6 + \lambda_5 s^5 + \lambda_4 s^4 + \lambda_3 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0 = 0 \quad (40)$$

El polinomio característico representado por (40) debe ser Hurwitz. Para obtener las ganancias del controlador (37)

usando (40), se propone el siguiente polinomio característico Hurwitz de lazo cerrado $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^4$ con $\omega_n = 25$ y $\zeta = 1$. La trayectoria de referencia deseada se construyó a partir de polinomios de Bezier de diferentes amplitudes, éstas son: $2\pi/5$, $\pm\pi/4$ y $-\pi/3$. Se introdujo a la simulación ruido de sensor con desviación estándar $\sigma = 1 \times 10^{-3}$.

Los resultados de la simulación del controlador tipo GPID se muestran en la Figura 5. La figura muestra el seguimiento de trayectoria del eslabón flexible, el voltaje de control aplicado al motor de CD así como el resultado de los criterios de desempeño evaluados. Las simulaciones corrieron durante 20 segundos. La masa de la punta del brazo m_1 se propuso de 0.025 Kg así como para la parte experimental.

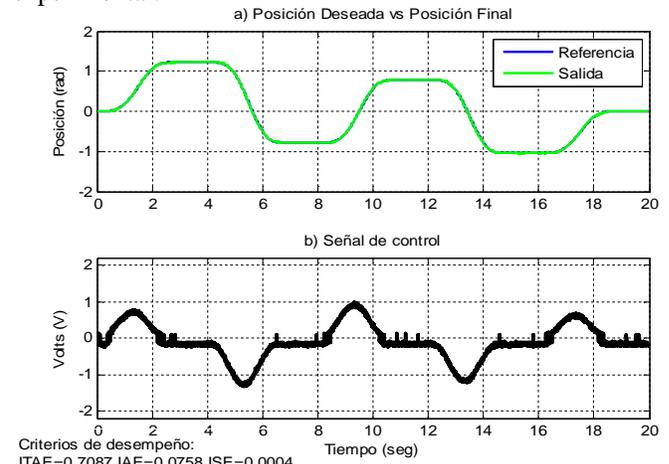


Figura 5. Resultados de la simulación del control GPID.

B. DISEÑO DEL ESQUEMA DE CSM PARA EL BRAZO FLEXIBLE.

Se considera ahora la ecuación del esquema de CSM descrita por (30). Como ya se mencionó, esta configuración de control está libre de modelo; es decir, el modelo se desconoce completamente. Se utilizó un controlador tipo PI, las ganancias proporcional e integral propuestas son $K_p = 3.069$ y $K_i = 0.192$. El parámetro δ para la estimación de F es $\delta = 70$, y se utiliza sólo la primera derivada de la señal de salida, es decir, \dot{y} . Por lo tanto, el esquema de CSM tiene la forma

$$V_m = -\frac{F}{\delta} + \frac{\dot{y}^*}{\delta} + K_p e + K_i \int e \quad (41)$$

Los resultados de la simulación del esquema de CSM se muestran en la Figura 6. Se tomaron las mismas condiciones de simulación que con el controlador GPID. La figura muestra el seguimiento de trayectoria del eslabón flexible, el voltaje de control aplicado al motor de CD así como el resultado de los criterios de desempeño evaluados.

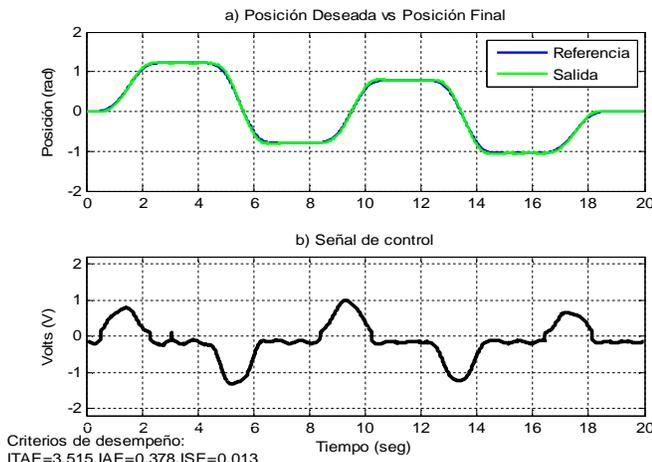


Figura 6. Resultados de la simulación del esquema de CSM.

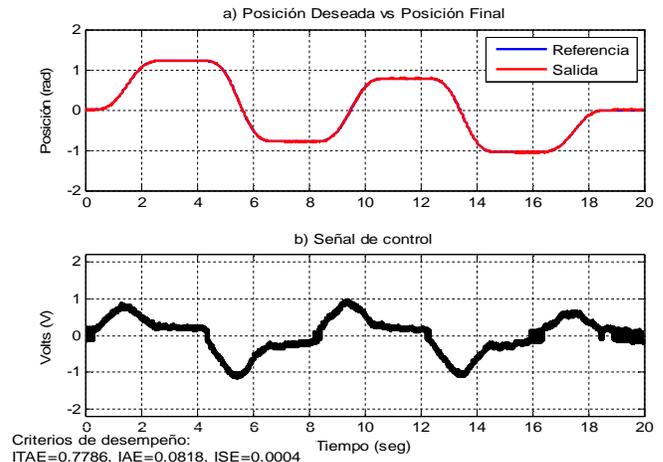


Figura 8. Resultados experimentales del control GPID.

C. RESULTADOS EXPERIMENTALES.

En esta sección se exhiben los resultados experimentales obtenidos de la aplicación de los controladores propuestos al sistema de brazo de eslabón flexible de la Figura 1. En la Figura 7, se muestra la validación experimental del modelo propuesto en la Sección II. Se observa que el modelo es una representación apropiada del sistema real. Pero, en lo que respecta a la posición del brazo, el modelo no pudo reproducir totalmente las oscilaciones que conciernen a la flexibilidad del brazo, como se observa en la Figura 7.b). Pero este hecho no afecta en la aplicación en tiempo real ya que los esquemas propuestos son robustos en presencia de incertidumbre de modelado e incertidumbre paramétrica.

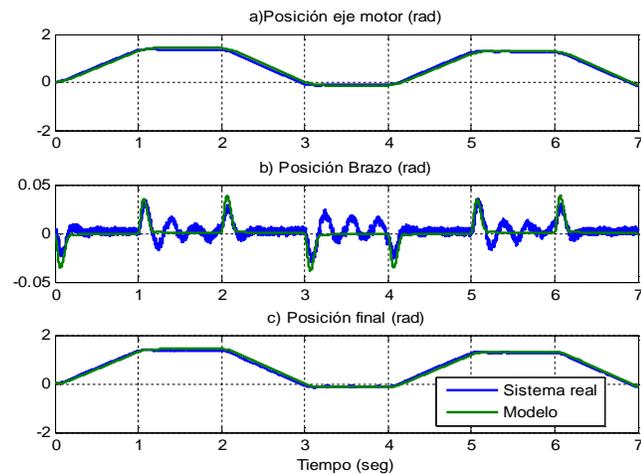


Figura 7. Validación del modelo del eslabón con el sistema físico.

A continuación se muestran las gráficas de los resultados experimentales obtenidos en la aplicación de los controladores. En la Figura 8 se muestran los resultados del controlador GPID. Esta figura exhibe la señal de salida contra la señal de referencia (Fig. 8.a), así como la señal de control aplicada al sistema (Fig. 8.b). Ahí mismo se incluyen los valores de los criterios de desempeño para el controlador GPID.

La Figura 9 exhibe los resultados obtenidos con el esquema de CSM. Así como en el caso anterior, se muestra la señal de salida contra la referencia (Fig. 9.a) y la señal de control aplicada al sistema (Fig. 9.b). Ahí mismo se incluyen los valores de los criterios de desempeño para el controlador.

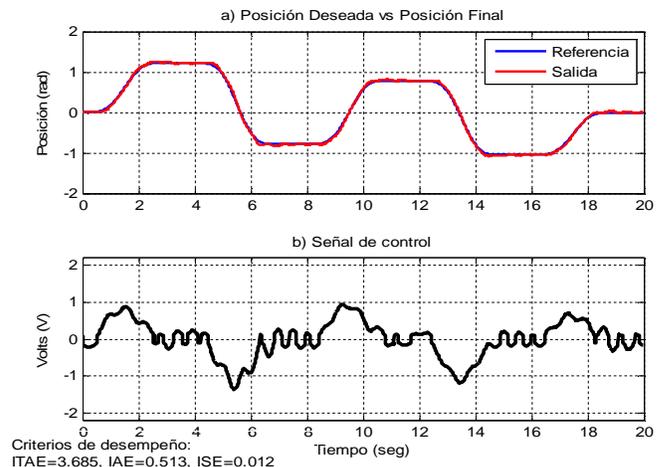


Figura 9. Resultados experimentales del esquema de CSM.

V. CONCLUSIONES.

Para las dos técnicas de control analizadas, se pudo constatar que ambos esquemas: GPID y CSM, resuelven el problema de seguimiento de trayectoria aplicado a un brazo robot con eslabón flexible de un grado de libertad.

En lo que respecta al controlador GPID, éste requiere del conocimiento del modelo sistema, al menos parcialmente. Porque se requiere determinar el controlador nominal basado en la plitud deferencial del sistema. Éste se obtiene determinando la salida plana del sistema y una parametrización de la entrada de control en función de dicha salida y de sus n derivadas temporales sucesivas. Como se pudo constatar, el modelo obtenido en la Sección II representa parcialmente al sistema real, ya que no pudo reproducir completamente las oscilaciones del sistema real.

Respecto al esquema de CSM, éste se basa en realizar una identificación local del sistema a partir de las derivadas de



la salida y de la señal de control. Esto da origen a la función F. Este esquema de control no requiere conocimiento del sistema y, por ende, resulta menos complicada su aplicación, a diferencia del controlador GPID que presenta un diseño más complejo.

Ambos esquemas se implementaron en tiempo real con éxito, obteniendo resultados aproximados a los que las simulaciones arrojaron. Para determinar el desempeño de los controladores, tanto en simulación como en tiempo real, se evaluaron tres criterios de error, estos son: ISE, IAE e ITAE (por sus siglas en inglés). Como se puede observar, el control GPID tiene un mejor desempeño que el esquema de CSM en los tres criterios evaluados, tanto en simulación como en la aplicación en tiempo real. Basándose en los valores del criterio de desempeño ITAE, se puede observar de las Figuras 8 y 9, que el desempeño del controlador GPID es mejor que el del esquema de CSM. Sin embargo, el controlador GPID requiere del modelo del sistema y el esquema de CSM no. El diseño del esquema CSM es menos complejo y aún se obtiene un desempeño aceptable.

VI. AGRADECIMIENTOS.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por haber financiado este proyecto.

REFERENCIAS

- Victor Etxebarria, Arantza Sanz e Ibone Lizarraga (2005). Control of a Lightweight Flexible Robotic Arm Using Sliding Modes. *International Journal of Advanced Robotic Systems*. Volume 2, pp 103-110.
- Je S. Yeon, Jong H. Park y Sang-Hun Lee (2008). Practical Robust Control for Flexible Joint Robot Manipulators. 17th IFAC World Congress (IFAC'08).
- Dadi Hissein y Boris Lohmann (2001). Robust control for a flexible-link manipulator using sliding modes techniques and nonlinear H_∞ control design methods, *IEEE International Conference on Robotics & Automation*. Seoul, Korea.
- Jung Hua Yang, Feng Li Lian y Li Chen Fu (1997). Nonlinear Adaptive Control for Flexible-Link Manipulators. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, VOL. 13, NO. 1, pp 140-148.
- M. S. de Queiroz, D. M. Dawson, M. Agarwal y F. Zhang (1999). Adaptive Nonlinear Boundary Control of a Flexible Link Robot Arm, *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, VOL. 15, NO.
- Woosoon Yim (2001). Adaptive Control of a Flexible Joint Manipulator, *IEEE International Conference on Robotics & Automation*. Seoul, Korea.
- L. B. Gutiérrez, F. L. Lewis y J. Andy Lowe (1998). Implementation of a Neural Network Tracking Controller for a Single Flexible Link: Comparison with PD and PID Controllers. *IEEE Transactions on industrial electronics*, VOL. 45, NO. 2
- J. Carusone, Keir S. Buchan, y G. M. T. D'Eleuterio(1993). Experiments in End-Effector Tracking Control for Structurally Flexible Space Manipulators. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, VOL. 9, NO. 5, pp 553-560.
- Vicente Feliu Batlle (2006). Robots flexibles: hacia una generación de robots con nuevas prestaciones. *Revista iberoamericana de automática e informática industrial*. VOL 3, NO. 3.
- Herbert Sira-Ramírez y Sunil K. Agrawal (2004). *Differentially Flat Systems*. Marcel Dekker Inc.
- E. Chávez-Conde, H. Sira-Ramírez y J. Álvarez-Gallegos (2005). Diseño mecatrónico, modelado y control PI generalizado de un sistema mecánico rotacional. *IEEE 3° congreso internacional de innovación y desarrollo tecnológico*, 28 al 30 de septiembre 2005, Cuernavaca, Morelos, México.
- Hebertt Sira-Ramírez, Richard Marquez y Michel Fliess (2001). On the Generalized PID Control of Linear Dynamic Systems. *European Control Conference*. Portos, Portugal.
- Michel Fliess y Cédric Join(2008). Intelligen PID controlers. 16th Mediterrean Conference on Control and Automation, Ajaccio: France.
- Michel Fliess y Cédric Join(2009). Model-free control and intelligen PID controlers: towards a possible trivialization of nonlinear control. 15th IFAC Symposium on system identification.